

© International Baccalaureate Organization 2026

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2026

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2026

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

# Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación

## Nivel Superior

### Prueba 3

20 de mayo de 2026

**Zona A** tarde | **Zona B** tarde | **Zona C** tarde

1 hora 15 minutos

---

#### Instrucciones para el alumnado

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[55 puntos]**.

Conteste **las dos** preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada pregunta. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 25]

**Esta pregunta trata sobre el uso de técnicas estadísticas para analizar las decisiones incorrectas (errores) que los árbitros de baloncesto toman en situaciones de mucha presión.**

Gabriel está investigando si un árbitro de baloncesto toma más o menos decisiones incorrectas a medida que aumenta la presión hacia el final de un partido que está muy reñido.

Gabriel obtiene los datos de la NBA (National Basketball Association, ‘Asociación de Baloncesto Estadounidense’).

Encuentra datos sobre el número de decisiones incorrectas que se toman en los dos últimos minutos del partido cuando a los equipos los separan tres puntos o menos. Gabriel utiliza estos datos en cada una de las pruebas que realiza.\*

Elige cuatro equipos, de los 30 equipos que tiene la NBA, enumerados por orden alfabético.

- (a) Explique cómo podría elegir Gabriel su muestra de cuatro equipos utilizando un muestreo aleatorio sistemático.

[2]

---

\* Página web *NBA officiating last two minute reports archive* (‘archivo de informes sobre el arbitraje en la NBA en los dos últimos minutos de partido’).

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 1: continuación)**

En la muestra que toma Gabriel hay, en total, 156 decisiones incorrectas. Gabriel divide los dos últimos minutos del partido en intervalos de 20 segundos y anota el intervalo en el que se tomó cada una de esas 156 decisiones incorrectas.

Gabriel decide realizar una prueba  $\chi^2$  de determinación de la bondad del ajuste, a un nivel de significación del 5 %, con las siguientes hipótesis:

$H_0$  : Las decisiones incorrectas se distribuyen de manera uniforme entre los distintos intervalos.

$H_1$  : Las decisiones incorrectas no se distribuyen de manera uniforme entre los distintos intervalos.

Los datos se resumen en la siguiente tabla, donde  $t$  es el número de segundos que faltan para que termine el partido.

| $t$ (segundos)                          | $0 \leq t < 20$ | $20 \leq t < 40$ | $40 \leq t < 60$ | $60 \leq t < 80$ | $80 \leq t < 100$ | $100 \leq t < 120$ |
|-----------------------------------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|-------------------|--------------------|
| <b>Número de decisiones incorrectas</b> | 41              | 31               | 23               | 22               | 20                | 19                 |

- (b) (i) Halle el número esperado de decisiones incorrectas que tendría que haber en cada intervalo de 20 segundos, según la hipótesis nula. [2]
- (ii) Indique el número de grados de libertad de la prueba. [1]
- (iii) Halle el valor de  $\chi^2_{calc}$ . [2]
- (iv) A partir de lo anterior, indique la conclusión de la prueba, sabiendo que el valor crítico es 11,1 . Justifique su respuesta. [2]
- (v) Indique otra característica de los datos de Gabriel que respalde la teoría de que el número de decisiones incorrectas va aumentando a medida que aumenta la presión que soporta el árbitro. [1]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 1: continuación)**

A continuación, Gabriel se pregunta si las decisiones incorrectas podrían beneficiar más al equipo que juega en casa (el equipo local) que al equipo que juega fuera de casa (el equipo visitante). Por ello, halla el número total de decisiones incorrectas que se tomaron en los últimos dos minutos de los partidos reñidos que disputaron los 30 equipos de la NBA en una temporada y decide que contrastará los datos utilizando las siguientes hipótesis:

$H_0$  : La probabilidad de que una decisión incorrecta beneficie al equipo local es igual a 0,5 .

$H_1$  : La probabilidad de que una decisión incorrecta beneficie al equipo local es mayor que 0,5 .

Los datos de Gabriel referidos a las decisiones incorrectas se muestran en la siguiente tabla.

| Decisiones que benefician al equipo local | Decisiones que benefician al equipo visitante |
|-------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| 695                                       | 637                                           |

Gabriel decide utilizar la distribución binomial para contrastar estas hipótesis, a un nivel de significación del 5 % .

- (c) (i) Indique una suposición que haya hecho Gabriel. [1]
- (ii) Halle el valor del parámetro  $p$  correspondiente a esta prueba. [3]
- (iii) Indique la conclusión de la prueba y justifique su respuesta. [2]

Martina le sugiere a Gabriel que, dado que algunos equipos tienen unos seguidores más apasionados que otros, el número de decisiones incorrectas que favorecen al equipo local podría depender de la cancha donde se juega el partido.

Gabriel decide realizar una prueba de  $\chi^2$  para determinar si hay independencia en el caso de los cuatro equipos que ha elegido: Detroit, Brooklyn, Cleveland y Philadelphia. En la siguiente tabla se muestra la distribución de las decisiones incorrectas que favorecieron al equipo local y al equipo visitante.

|                                   |                  | Equipo que jugó en casa (local) |          |           |              |
|-----------------------------------|------------------|---------------------------------|----------|-----------|--------------|
|                                   |                  | Detroit                         | Brooklyn | Cleveland | Philadelphia |
| Decisiones incorrectas favorables | Equipo local     | 24                              | 23       | 18        | 23           |
|                                   | Equipo visitante | 9                               | 16       | 21        | 22           |

- (d) (i) Indique, en contexto, las hipótesis de esta prueba. [2]
- (ii) Hallando el valor del parámetro  $p$  , verifique que la prueba no es significativa al nivel del 5 % . [2]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 1: continuación)**

Por último, Gabriel decide contrastar si el equipo de su ciudad, Brooklyn, recibe más decisiones incorrectas favorables cuando es el equipo local que cuando es el equipo visitante.

Para ello, revisa las cinco temporadas anteriores y encuentra siete oponentes para los que tiene datos siendo Brooklyn el equipo local y siendo el equipo visitante. Los reúne en la siguiente tabla.

| Oponentes                                | Utah | Philadelphia | Atlanta | Charlotte | Indiana | Dallas | Toronto |
|------------------------------------------|------|--------------|---------|-----------|---------|--------|---------|
| <b>Ventaja obtenida siendo local</b>     | 2,2  | 0,1          | 0,1     | −1,1      | −2,3    | 1,8    | −0,8    |
| <b>Ventaja obtenida siendo visitante</b> | 0,3  | −0,9         | 0,1     | −1,0      | −1,2    | −1,1   | −0,7    |

Los números de la tabla son el promedio de las diferencias entre las decisiones incorrectas favorables para Brooklyn y las decisiones incorrectas desfavorables.

Por ejemplo, el valor 2,2 de la primera columna significa que cuando jugó en casa contra Utah, Brooklyn recibió, en promedio, 2,2 decisiones incorrectas favorables más que decisiones incorrectas desfavorables.

Esto es lo que se define como una “ventaja obtenida” de 2,2 .

Sea  $\mu_D$  la media de la población de la ventaja obtenida por Brooklyn siendo local menos la ventaja obtenida siendo visitante.

- (e) Utilice una prueba  $t$  de Student para muestras relacionadas (pareadas), a un nivel de significación del 5 %, para determinar si estos datos proporcionan pruebas de que la media de las ventajas obtenidas siendo local es mayor que la media de las ventajas obtenidas siendo visitante.

Indique las hipótesis en función de  $\mu_D$ , halle el valor del parámetro  $p$  e indique la conclusión de la prueba. Puede suponer que se han cumplido todas las condiciones necesarias para realizar la prueba.

[4]

- (f) Justifique una posible conclusión a la que Gabriel podría llegar razonablemente, a partir de los resultados de sus pruebas, sobre si jugar en casa supone una ventaja en las decisiones arbitrales incorrectas en los últimos dos minutos de partidos ajustados.

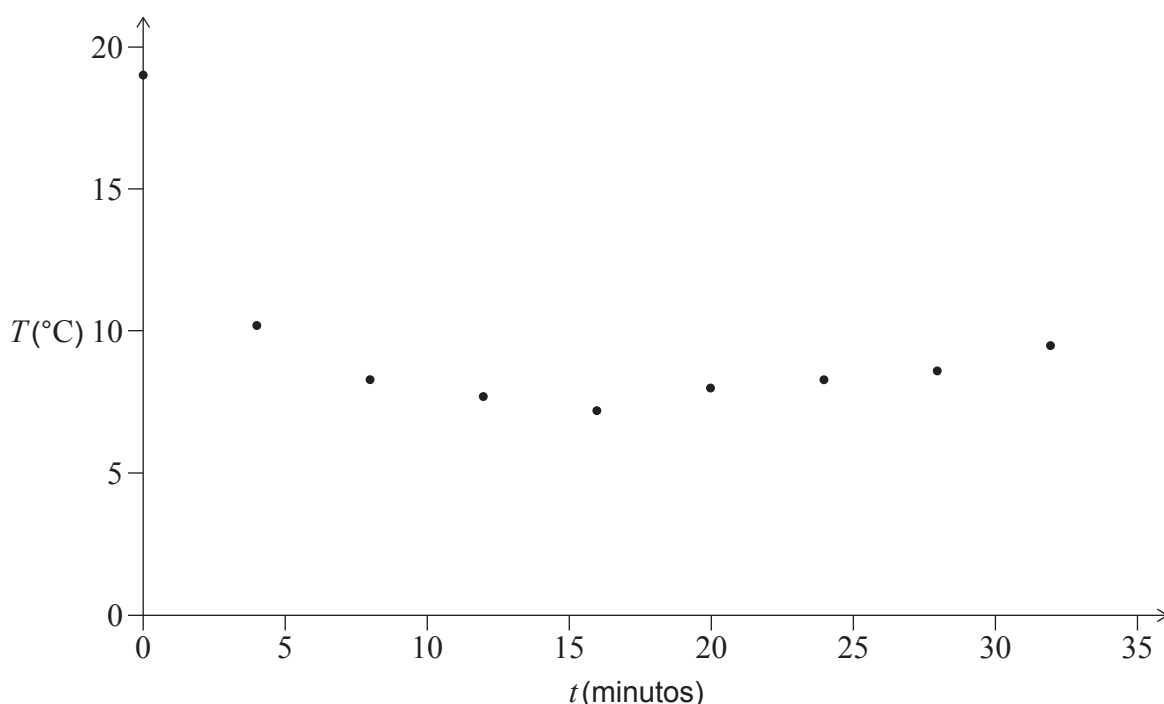
[1]

2. [Puntuación máxima: 30]

**En esta pregunta se evalúan distintos modelos para representar el cambio de temperatura del agua cuando se añade un cubito de hielo y se deja que se derrita.**

Aisha coloca un cubito de hielo en un vaso con agua a temperatura ambiente y va anotando la temperatura del agua a intervalos de cuatro minutos. En la siguiente tabla y el siguiente diagrama se muestra la temperatura del agua ( $T$ , en grados Celsius) cuando han transcurrido  $t$  minutos

| $t$ (minutos) | 0  | 4    | 8   | 12  | 16  | 20  | 24  | 28  | 32  |
|---------------|----|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $T$ (°C)      | 19 | 10,2 | 8,3 | 7,7 | 7,2 | 8,0 | 8,3 | 8,6 | 9,5 |



Aisha decide modelizar los datos con un modelo cuadrático.

- (a) (i) Utilizando el diagrama, indique una razón por la cual Aisha habría elegido un modelo cuadrático. [1]
- (ii) Halle la ecuación de la curva de regresión cuadrática de mínimos cuadrados correspondiente a estos datos. [3]
- (b) Explique, partiendo del contexto de la pregunta, por qué es poco probable que el modelo cuadrático resulte adecuado para valores grandes de  $t$ . [2]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 2: continuación)**

A partir de su investigación, Aisha decide que un modelo mejor será uno de la forma

$$T = c - at^{\frac{1}{2}}e^{-bt}, \text{ donde } a, b, c \in \mathbb{R}^+.$$

Para hallar  $c$ , Aisha decide utilizar su valor de  $T$  correspondiente a  $t = 0$ .

(c) Muestre que  $c = 19$ . [1]

Aisha decide hallar un valor para cada uno de los parámetros  $a$  y  $b$  utilizando dos métodos distintos.

El primer método consiste en suponer que el mínimo de la función  $T$  se alcanza en el punto  $(16; 7,2)$ .

(d) (i) Halle una expresión para  $\frac{dT}{dt}$  en función de  $a$ ,  $b$  y  $t$ . [3]

(ii) A partir de lo anterior, muestre que  $b = \frac{1}{32}$ . [4]

(iii) Sustituyendo  $(16; 7,2)$  en la ecuación de  $T$ , halle el valor de  $a$ . [2]

(iv) A partir de lo anterior, escriba la ecuación que ha obtenido Aisha para  $T$  al utilizar este método. [1]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 2: continuación)**

El segundo método que utiliza Aisha consiste en transformar los datos y utilizar la regresión lineal.

Para poder hacerlo, primero reorganiza la ecuación de  $T$  de la siguiente manera:

$$\frac{19-T}{t^{\frac{1}{2}}} = ae^{-bt}.$$

A continuación, Aisha plantea  $\frac{19-T}{t^{\frac{1}{2}}} = x$ , para así formar la ecuación  $x = ae^{-bt}$ .

A partir de sus datos, calcula los valores de  $x$  que se muestran en la siguiente tabla.

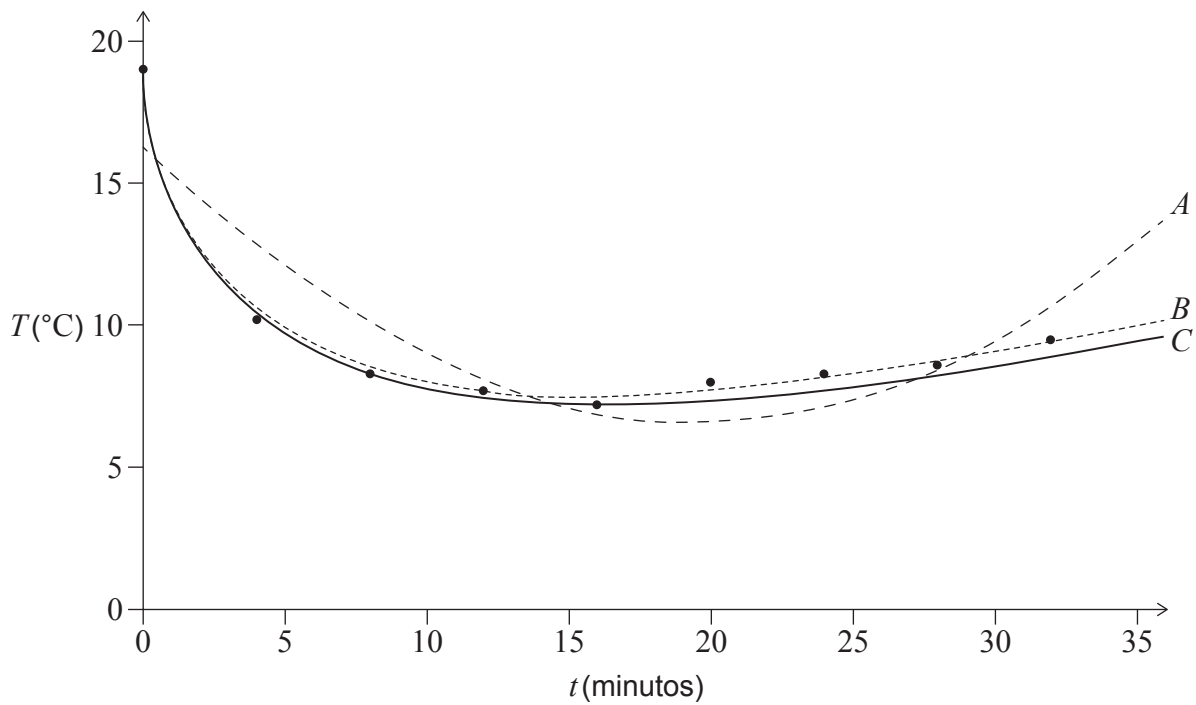
|                       |      |      |      |     |      |      |      |      |
|-----------------------|------|------|------|-----|------|------|------|------|
| $t$                   | 4    | 8    | 12   | 16  | 20   | 24   | 28   | 32   |
| $T(^{\circ}\text{C})$ | 10,2 | 8,3  | 7,7  | 7,2 | 8,0  | 8,3  | 8,6  | 9,5  |
| $x$                   | 4,40 | 3,78 | 3,26 | $q$ | 2,46 | 2,18 | 1,97 | 1,68 |

- (e) Halle el valor de  $q$ . [1]
- (f) (i) Halle la ecuación de la recta de regresión de mínimos cuadrados para  $\ln x$  sobre  $t$ . [3]
- (ii) A partir de lo anterior, halle el valor de  $a$  y el valor de  $b$  que obtuvo Aisha al utilizar este segundo método. [4]
- (iii) Escriba la ecuación que ha obtenido Aisha para  $T$  al utilizar este segundo método. [1]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 2: continuación)**

Las curvas que aparecen en la siguiente figura representan los tres modelos que obtuvo Aisha en los apartados (a)(ii), (d)(iv) y (f)(iii).



(g) Indique, dando un motivo, qué gráfico — $A$ ,  $B$  o  $C$ — representa el modelo que obtuvo en el apartado:

(i) (a)(ii) [2]

(ii) (f)(iii) [2]

**Advertencia:**

Los contenidos usados en las evaluaciones del IB a menudo provienen de fuentes externas auténticas. Las opiniones expresadas en ellos pertenecen a sus autores y/o editores, y no reflejan necesariamente las del IB. En ocasiones, se incluyen empresas, productos o personas ficticios. Cualquier parecido con entidades reales es pura coincidencia. Todas las marcas o marcas registradas (™ o ®) incluidas se utilizan únicamente con fines ilustrativos, y su uso no implica ninguna afiliación con el IB ni aprobación por parte del IB.

**Referencias:**

1. NBA, 2024. NBA officiating last two minute reports archive. *NBA Official*, [en línea] Disponible en: <https://official.nba.com/nba-officiating-last-two-minute-reports-archive/> [Consulta: 16 de enero de 2025].